Sommaire

7 - Objectif 14

8 – Bilan des actions mécaniques 14

8.1 – Repère local 14
8.2 – Calcul du moment (Produit vectoriel) 15
8.3 – Présentation du bilan 16

9 –Écriture du torseur de liaison 17

9.1 – Degré de liberté d'une liaison 17
9.2 – Comment écrire un torseur de liaison 17à19

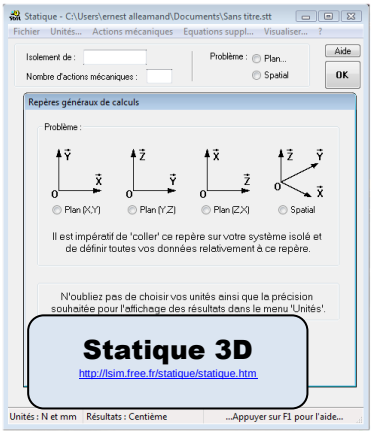
10- Simplification d'un torseur dans le plan (2D) 19
10.1 – Simplifier la force 19
10.2 – Simplifier le moment 19
10.3 – En résumé 20-21

11- Réduction des torseurs en un point 21
11.1 – PFS 21
11.2 – Formule de transfert 21
11.3 – Calcul des moments 22
11.4 – Solution du problème..... 22

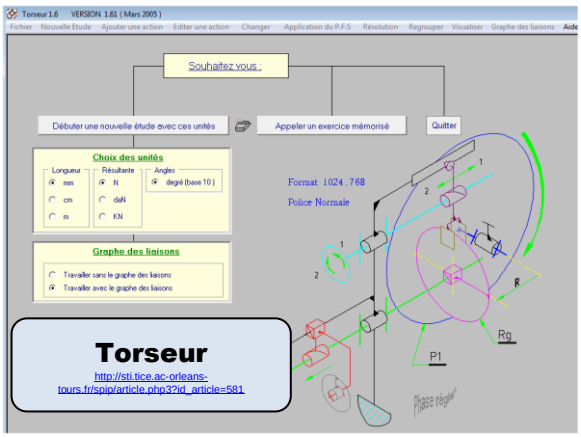
12- Hypothèses courantes et leurs interprétations 23

7-Objectif :

Cette deuxième partie poursuit le même objectif que la partie précédente sauf qu'ici la résolution se fait par le calcul. Nous apprendrons dans ce chapitre comment faire ce type d'étude, dans les cas plus complexes nous utiliserons des logiciels de calculs comme :



Statique



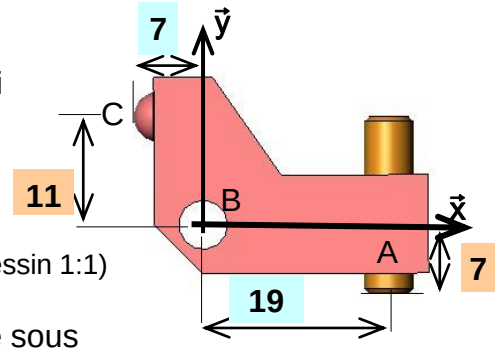
Torseur

8-Bilan des actions mécaniques.

8.1) Repère local.

A la différence de la statique graphique, il est nécessaire de fixer un repère local $\mathcal{R}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. C'est à partir de celui-ci que l'on pourra :

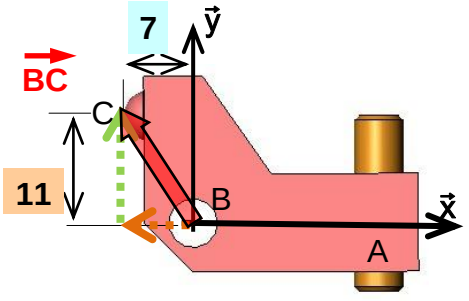
- Positionner les points de contact entre solide, comme ici sur cette figure :
  - Contact en A : A (19 ;-7 ; 0)
  - Contact en B : B (0 ; 0 ; 0)
  - Contact en C : C (-7 ; 11 ; 0)



(en mm, échelle du dessin 1:1)

- Calculer les distances entre deux points, celle-ci sera notée sous la forme d'un vecteur composé de 2 lettres :

$$\overrightarrow{BC} \begin{vmatrix} XC - XB \\ YC - YB \\ ZC - ZB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 \\ 11 \\ 0 \end{vmatrix}$$



Ce qui s'interprète de la manière suivante :

La distance entre B et C est de :

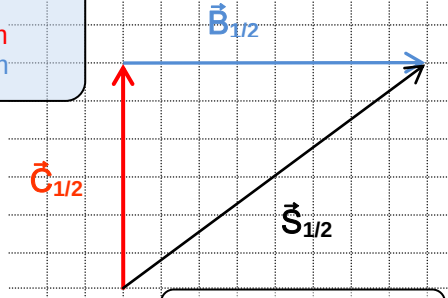
- -7 mm suivant l'axe $\vec{x}$
- 11 mm suivant l'axe $\vec{y}$
- 0 mm suivant l'axe $\vec{z}$

- Décomposer une force suivante 1,2 ou 3 axes, car il n'est plus possible d'additionner les forces comme nous le faisions graphiquement, exemple :

Longueur des vecteurs :

$C_{1/2} = 3$ cm
$B_{1/2} = 4$ cm

Méthode graphique



$\vec{C}_{1/2} + \vec{B}_{1/2} = \vec{S}_{1/2}$

Résultat : Longueur du vecteur : $S_{1/2} = 5$ cm

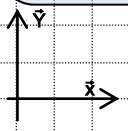
Méthode analytique

$\vec{C}_{1/2} + \vec{B}_{1/2} = \vec{S}_{1/2}$

$3 + 4 = 7$

On constate bien que l'on ne trouve pas 5 on ne peut donc pas additionner les normes.

Pour additionner des vecteurs entre eux il est nécessaire de les écrire dans un repère, c'est-à-dire suivant les 3 axes puis d'additionner les « x » ensembles, les « y » ensembles et les « z » ensembles :



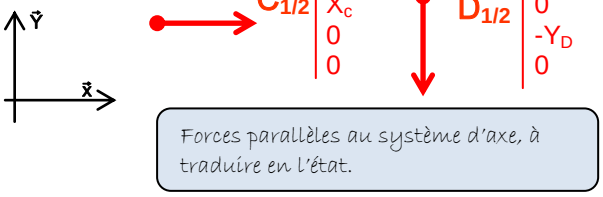
Dans cette base, les vecteurs s'écrivent :

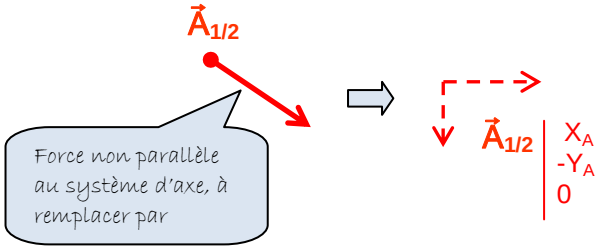
$$\vec{C}_{1/2} + \vec{B}_{1/2} = \vec{S}_{1/2}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

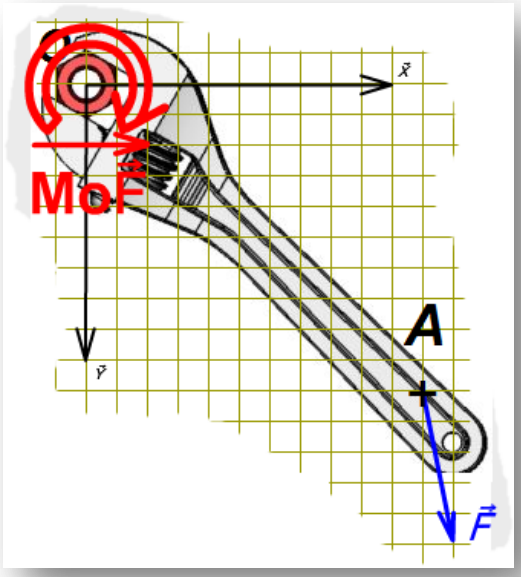
La norme est : $S_{1/2} = (4^2 + 3^2 + 0^2)^{1/2} = 5$ cm

Ce qui sous entend pour la suite que toute force qui ne serait pas parallèle au système d'axe choisi devra être réécrite.





8.2) Calcul du moment (produit vectoriel).



1ère ligne

$\overrightarrow{M_O F} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ = | y .Fz - z .Fy |

Calcul de la 1ère ligne :
- Je **cache** la 1ère ligne
- Je **fais le produit en croix** des lignes qui me restent en commençant par le terme qui suit la ligne barrée et à gauche.
- Diagonale 1 "moins" Diagonale 2

2ème ligne

$\overrightarrow{M_O F} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ = | y .Fz - z .Fy |
| z .Fx - x .Fz |

Calcul de la 2ème ligne :
- Je **cache** la 2ème ligne
- Je **fais le produit en croix** des lignes qui me restent en commençant par le terme qui suit la ligne barrée et à gauche.
- Diagonale 1 "moins" Diagonale 2

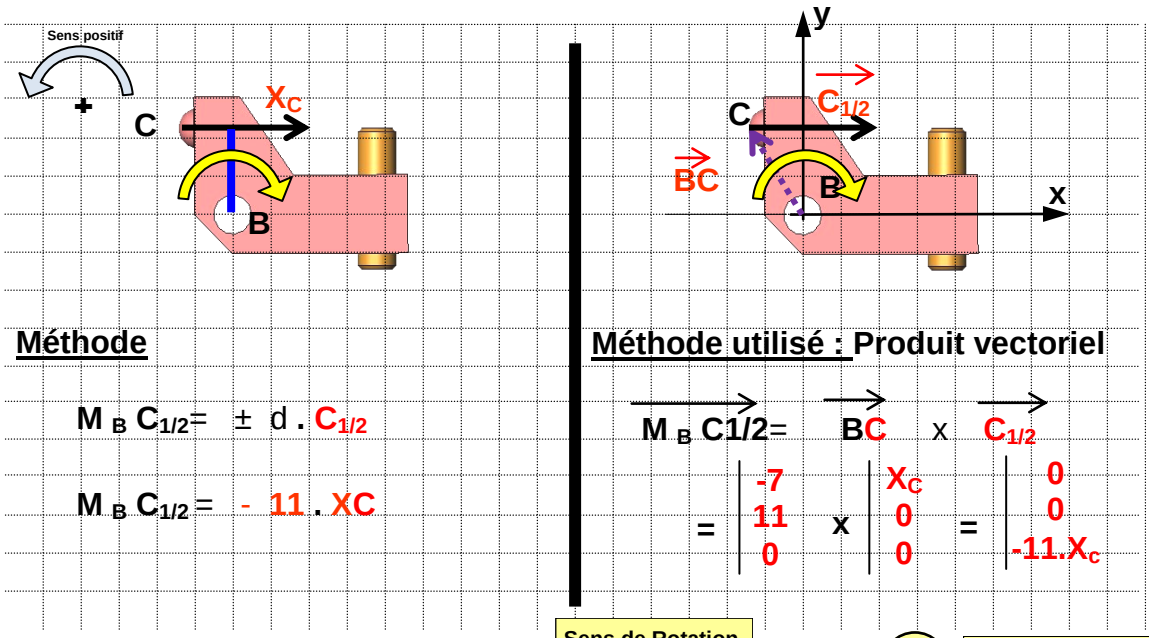
3ème ligne

$\overrightarrow{M_O F} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$ = | y .Fz - z .Fy |
| z .Fx - x .Fz |
| x .Fy - y .Fx |

Calcul de la 3ème ligne :
- Je **cache** la 3ème ligne
- Je **fais le produit en croix** des lignes qui me restent en commençant par le terme qui suit la ligne barrée et à gauche.
- Diagonale 1 "moins" Diagonale 2

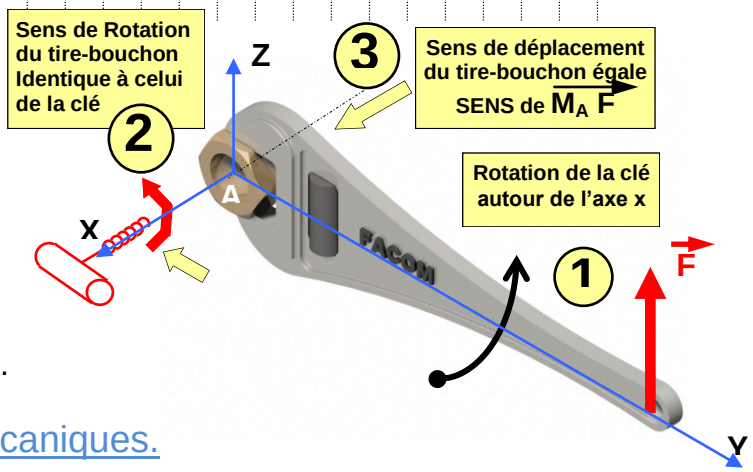
Flash

- **Application :**



Pour orienter le Vecteur Moment, il suffit de :

- **Positionner le tire-bouchon** sur l'axe de **rotation**.
- **Tourner celui-ci** dans le sens induit par le système de force.
- Le sens **de déplacement** du tire-bouchon indique le **sens** du vecteur Moment.



8.3) Présentation du bilan des actions mécaniques.

Le tableau est remplacé par des accolades à l'intérieur desquelles on retrouve sous forme de colonnes les composantes :

- du vecteur force $\vec{T}$ 0/1 suivant chacun des axes, les indices respectent la règle édictée dans le chapitre précédent.
- du vecteur moment en T de la force $\vec{T}$ 0/1 suivant chacun des axes.

$$\{\mathcal{T}_{0\to1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{T_{0/1}} = X_T\,\vec{x} + Y_T\,\vec{y} + Z_T\,\vec{z} \\ \overrightarrow{M_T\,\vec{T}_{0/1}} = L_T\,\vec{x} + M_T\,\vec{y} + N_T\,\vec{z} \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} X_T & L_T \\ Y_T & M_T \\ Z_T & N_T \end{Bmatrix}_T$$

Nom de la force

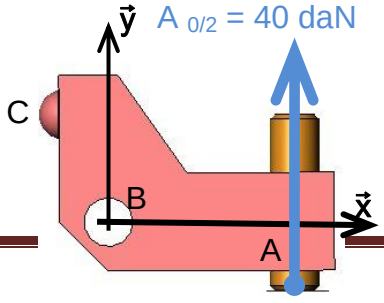
Point d'application de la force

Composantes du vecteur force sur les axes x, y et z

Composantes des vecteurs moments sur les axes x, y et z

-Exemple :

Appliquons pour la donnée du problème ce que nous venons de voir dans cette page :



$$\{\mathcal{T}_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 40 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

9-Écriture d'un torseur de liaison

9.1) Degré de liberté d'une liaison

Dans un repère orthonormé direct R(Oxyz), une liaison possède au maximun **6** degrés de liberté :
- soit **3** degrés de liberté en **Translation**
- soit **3** degrés de liberté en **Rotation**

Présentation des mouvements possibles sous la forme de deux

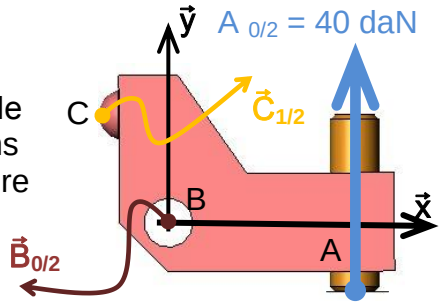
	Translation	Rotation
$\vec{x}$:	Tx	Rx
$\vec{y}$:	Ty	Ry
$\vec{z}$:	Tz	Rz

Le " **Zéro** " indique l'absence de mouvement.

9.2) Comment écrire un torseur de liaison.

Pour l'instant nous n'avons aucune idée de la valeur et de la direction des forces en B et C, grâce à ce que nous allons mettre en place dans ce paragraphe nous pourrons répondre à cette question.

En fait il est relativement facile à écrire car il repose sur un raisonnement simple :



- Nous savons qu'une force peut **Provoquer** ou **Interdire** un mouvement de **Translation** donc il existe bien une relation entre ces deux notions.
- Nous savons qu'un moment peut **Provoquer** ou **Interdire** un mouvement de **Rotation** donc il existe bien une relation entre ces deux notions.

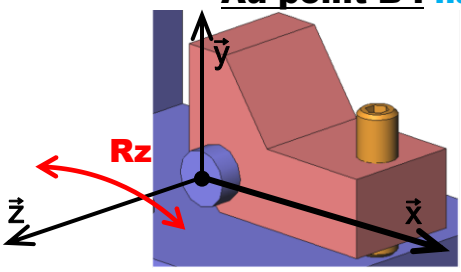
- **Méthode :**

Définir les degrés de liberté de la liaison ⇨ Définir les efforts 3D ⇨ ~~Simplifier dans le cas d'un problème plan~~

Imaginer les 2 pièces seules et en contact puis définissez les possibilités de mouvement

-Un mouvement est permis ⇨ pas d'effort (0)
-Un mouvement est interdit ⇨ un effort l'empêche

- **Au point B : liaison PIVOT**

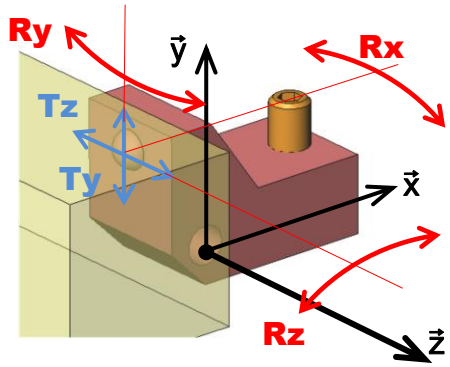


$$\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & Rz\end{matrix} \Rightarrow \{\mathcal{T}_{0\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_B$$

Exprimé dans le repère 3D

x,y,z

- **Au point C : liaison PONCTUELLE**

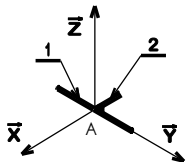
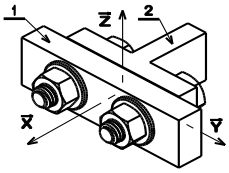
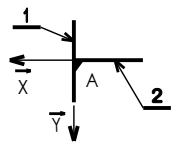
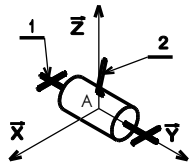
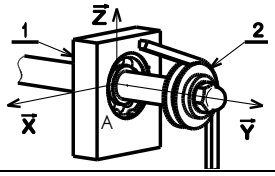
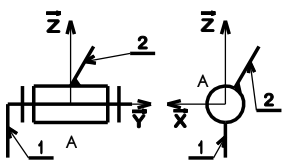
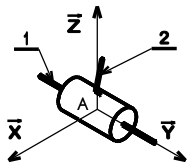
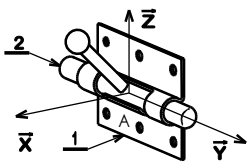
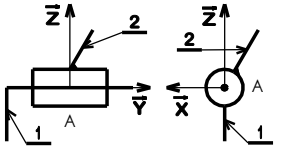
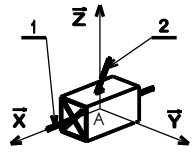
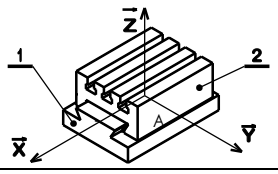
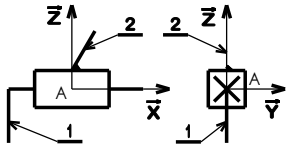
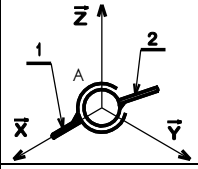
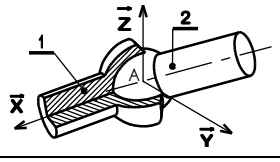
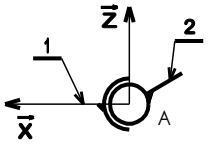
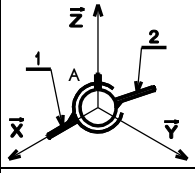
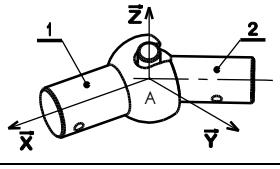
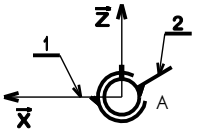
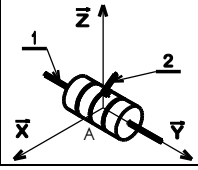
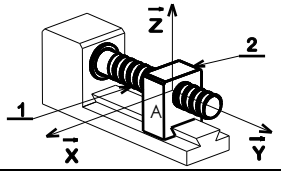
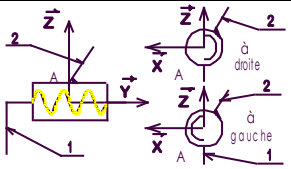


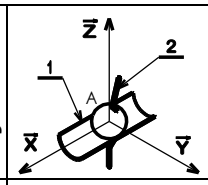
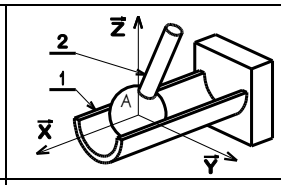
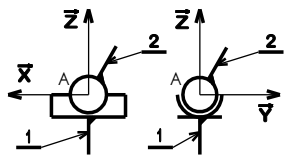
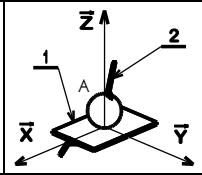
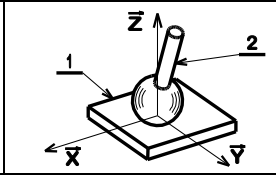
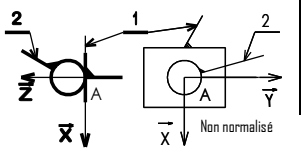
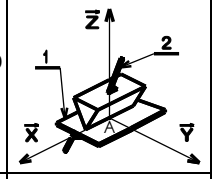
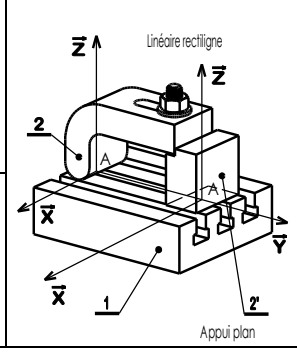
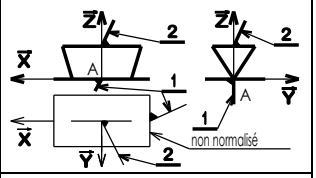
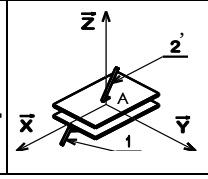
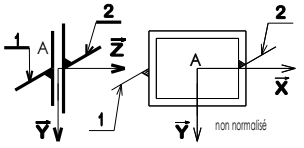
0 Rx
Ty Ry ⟹ $\{\mathcal{T}_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix}X_C & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{C}^{x,y,z}$
Tz Rz

Exprimé dans le repère 3D

-Torseur de liaisons 3D des liaisons élémentaires :

degrés de liberté, efforts transmissibles (dans l'espace et en cas de liaisons parfaites : sans adhérence).

Nom	Schéma 3D	Exemple	D°liberté nb	D°liberté détail (Tr Rot.)	$_A\{A\ 1/2\}$	Schémas 2D
Complète			0	$\begin{vmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & M_A\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}_{A,R}$	
Pivot			1	$\begin{vmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & 0\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}_{A,R}$	
Pivot glissant			2	$\begin{vmatrix}0&0\\1&1\\0&0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ 0 & 0\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}_{A,R}$	
Glissière			1	$\begin{vmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix}0 & L_A\\ Y_A & M_A\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}_{A,R}$	
Sphérique ou rotule			3	$\begin{vmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix}X_A & 0\\ Y_A & 0\\ Z_A & 0\end{Bmatrix}_{A,R}$	
Sphérique à doigt			2	$\begin{vmatrix}0&0\\0&1\\0&1\end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ Y_A & 0\\ Z_A & 0\end{Bmatrix}_{A,R}$	
Hélicoïdale			1	$\begin{vmatrix}0&0\\1&1\\0&0\end{vmatrix}$ liés	$\begin{Bmatrix}X_A & L_A\\ kM_A & M_A\\ Z_A & N_A\end{Bmatrix}_{A,R}$	

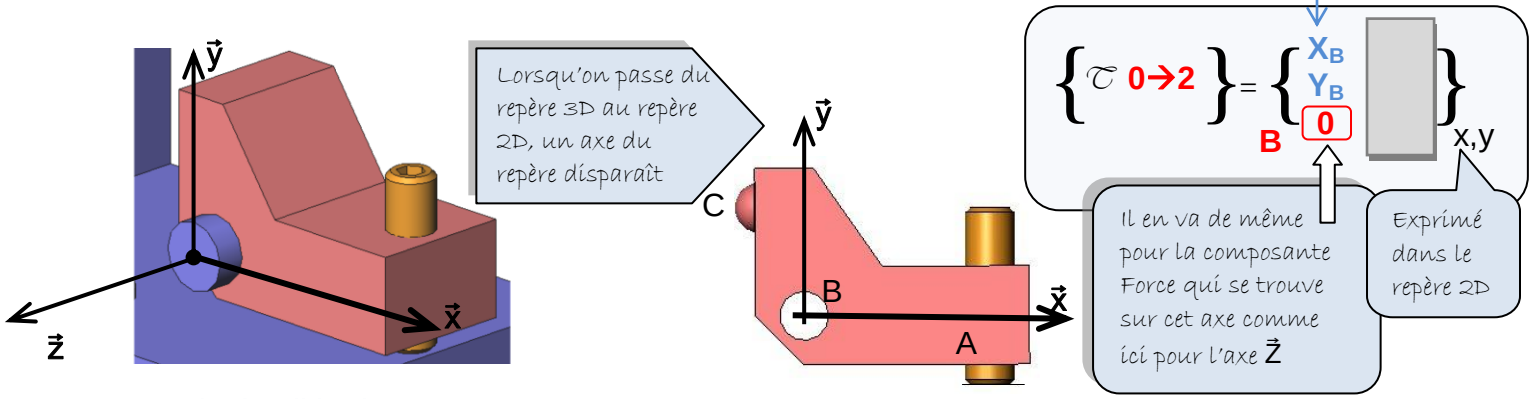
Sphère-cylindre			4	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{matrix} \right\}_{A,R}$	
Sphère-plan			5	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{matrix} \right\}_{A,R}$	
Linéaire rectiligne			4	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A \\ Z_A & 0 \end{matrix} \right\}_{A,R}$	
Appui-plan			3	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\left\{ \begin{matrix} 0 & L_A \\ 0 & M_A \\ Z_A & 0 \end{matrix} \right\}_{A,R}$	

10-Simplification d'un torseur de liaison dans le plan(2D).

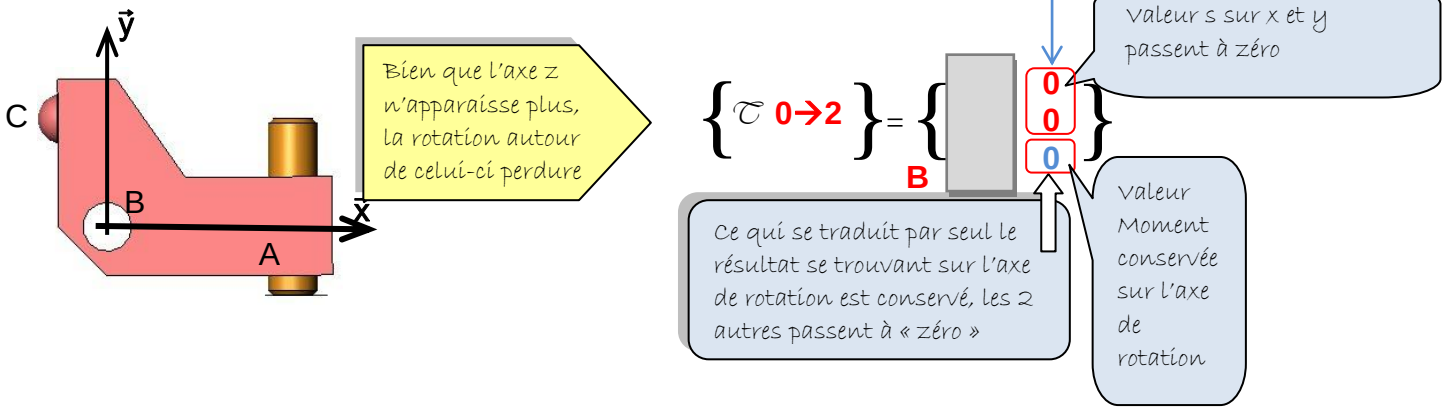
La plus part des problèmes peuvent se réduire à un problème plan, ce qui nous permet de diminuer le nombre de composantes du torseur et donc de simplifier l'étude.

- **Au point B : liaison PIVOT**

10.1) Simplifier la force.



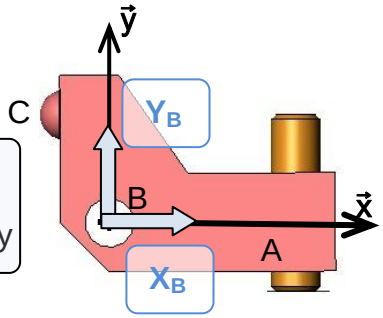
10.2) Simplifier le moment.



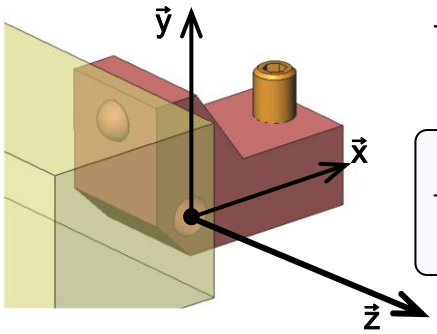
10.3) En résumé.

Définir les efforts 3D → Simplifier dans le cas d'un problème plan

$$\{\mathcal{T}\ 0\to 2\} = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B,x,y,z} \qquad \{\mathcal{T}\ 0\to 2\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B,x,y}$$



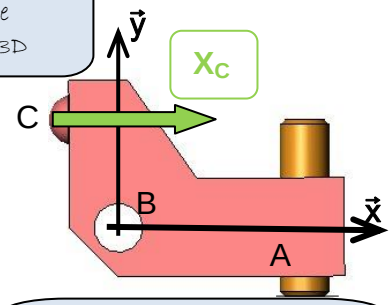
- **Au point C : liaison PONCTUELLE**



$$\{\mathcal{T}\ 1\to 2\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,x,y,z}$$

Exprimé dans le repère 3D

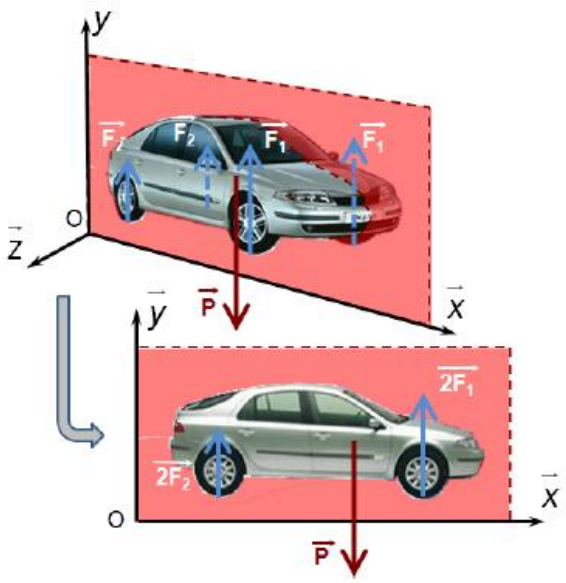
$$\{\mathcal{T}\ 1\to 2\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,x,y}$$



Celui-ci s'écrit de la même manière en 2D et 3D

Cas particulier d'un problème plan

Exemple :



Pour ce problème plan (O, x, y) tous les torseurs d'AM ont la forme :

$$\{\mathcal{T}\ ?\to ?\} = \begin{Bmatrix} ? & 0 \\ ? & 0 \\ 0 & ? \end{Bmatrix}_{C}$$

On peut admettre que l'on est face à un problème « plan » si :

- la **géométrie des liaisons** du système **présente un plan de symétrie,**
- les **AM extérieures** exercées sur ce système **sont symétriques par rapport à ce plan**, c'est à dire que :
  - les résultantes des AM extérieures sont parallèles au plan de symétrie,
  - les moments des AM extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

Dans le cas d'un **problème plan**, l'application du PFS ne peut fournir au maximum que **3 équations scalaires** :

- ***2 équations issues du théorème de la résultante*** statique projeté sur les 2 axes de la base appartenant au plan ;

- ***1 équation issue du théorème du moment statique*** projeté sur le 3ème axe de la base (perpendiculaire au plan).

En général, il est mentionné dans l'énoncé d'un exercice que l'on est face à un problème plan. Mais il faut être capable de simplifier les torseurs d'AM en annulant certaines composantes des éléments de réduction.

Allure d'un torseur écrit dans d'autres plans :

- Plan y,z

$$\{\mathcal{T}_{?\to?}\} = \begin{Bmatrix} 0 & ? \\ ? & 0 \\ ? & 0 \end{Bmatrix}_C$$

Plan x,z

$$\{\mathcal{T}_{?\to?}\} = \begin{Bmatrix} ? & 0 \\ 0 & ? \\ ? & 0 \end{Bmatrix}_C$$

11-Réduction des torseurs en un même point.

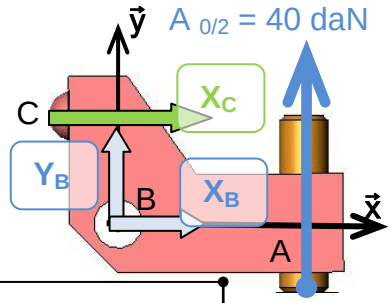
11.1) Principe Fondamental de la Statique.

Si un système matériel (**S**) est en équilibre par rapport à un repère fixe $\mathcal{R}$ (B, x, y, z), les actions mécaniques extérieures appliquées à (**S**) vérifient **simultanément** les deux relations suivantes :

Tous les points conviennent, mais il est plus judicieux de choisir le point où il y a le plus d'inconnues, comme ici le point B

$$\Sigma \vec{F}_{ext/syst.} = \vec{0} \quad (1)$$
$$\Sigma \vec{M}_B(\vec{F}_{ext/syst.}) = \vec{0} \quad (2)$$

L'application de la 1ère équation ne pose aucun problème, cela revient à additionner toutes les 1ères colonnes



$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C \quad \{\mathcal{T}_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B \quad \{\mathcal{T}_{0\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 40 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$\vec{M}_C(\vec{C}_{1/2})$ $\vec{M}_B(\vec{B}_{0/2})$ $\vec{M}_A(\vec{A}_{0/2})$

L'application de la 2ème équation pose problème car tous les moments sont calculés en des points différents.

11.2) Formules de transfert.

Le point ayant été choisi (ici B), tout moment n'étant pas calculé en ce point doit l'être, deux calculs sont donc à mener à partir des formules de transfert suivantes :

$$\vec{M}_B(\vec{C}_{1/2}) = \vec{M}_C(\vec{C}_{1/2}) + \vec{BC} \times \vec{C}_{1/2}$$

$$\vec{M}_B(\vec{A}_{0/2}) = \vec{M}_A(\vec{A}_{0/2}) + \vec{BA} \times \vec{A}_{0/2}$$

11.3) Calcul des moments.

$$\overrightarrow{M_B \vec{C}_{1/2}} = \overrightarrow{M_C \vec{C}_{1/2}} + \overrightarrow{BC} \times \vec{C}_{1/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 \\ 11 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -11.X_C \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B \vec{A}_{0/2}} = \overrightarrow{M_A \vec{A}_{0/2}} + \overrightarrow{BA} \times \vec{A}_{0/2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 19 \\ -7 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 760 \end{vmatrix}$$

11.4) Solution au problème.

$\vec{B}_{0/2} + \vec{A}_{0/2} + \vec{C}_{1/2} = \vec{0}$

$X_B + 0 + X_C = 0 \quad (1)$
$Y_B + 40 + 0 = 0 \quad (2)$
$0 + 0 + 0 = 0$

et

$\overrightarrow{M_B \vec{A}_{0/2}} + \overrightarrow{M_B \vec{B}_{0/2}} + \overrightarrow{M_B \vec{C}_{1/2}} = \vec{0}$

$0 + 0 + 0 = 0$
$0 + 0 + 0 = 0$
$760 + 0 - 11.X_C = 0 \quad (3)$

De l'équation (1) on tire :

$X_C = - X_B$ $\qquad X_B = - 69,09$ daN

De l'équation (2) on tire :

$Y_B = - 40$ daN

De l'équation (3) on tire :

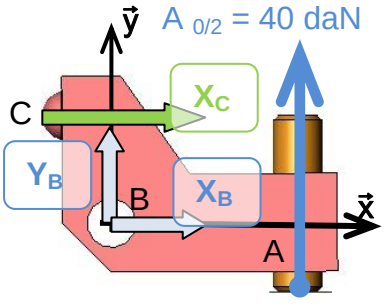
$X_C = 760 / 11 = 69,09$ daN

Ce qui nous donne les résultats suivants :

$\| \vec{C}_{1/2} \| = \sqrt{(69,09^2 + 0^2 + 0^2)} = 69,09$ daN $\quad \| \vec{B}_{0/2} \| = \sqrt{(69,09^2 + 40^2 + 0^2)} = 79,83$ daN

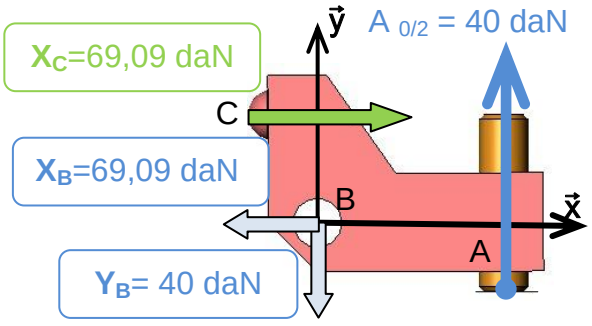
- **Comment interpréter un résultat positif ou négatif ?**

Modèle qui nous a servi pour le calcul



Comme nous ne connaissions pas le sens des efforts en B et C, arbitrairement nous avons pris toutes les composantes « positives ».

Modèle réel



-Conclusion :

- Si le résultat final est **positif**, cela indique que la composante est bien orientée, c'est le cas pour X_C.
- Si le résultat final est **négatif**, cela indique que la composante est mal orientée, il faut inverser le sens, c'est le cas pour X_B et Y_B.

L'analyse des valeurs suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ permet de vérifier que la pièce est bien en équilibre.

12-Hypothèses courantes et leurs interprétations.

- ***Les liaisons sont considérées comme parfaites et/ou sans frottement*** :

Cette hypothèse, très fréquemment utilisée, signifie que l'on peut utiliser les torseurs d'action mécanique transmissible par les liaisons vues dans le cours, à condition bien sur de les exprimer en un point de leur zone de validité (centre).

Attention de ne pas de ne pas mélanger les notations utilisées pour les torseurs d'action mécaniques et les degrés de liberté.

- ***Tx, TY, Tz : mvt de Translation***
- ***Rx, RY, Rz : mvt de Rotation***
- ***X, Y, Z : composante FORCE***
- ***L, M, N : composante MOMENT***

Il faut être vigilant lorsque l'hypothèse est formulée de la façon suivante :
*Les liaisons sont considérées comme parfaites et/ou sans frottement **SAUF** la liaison…*

- ***Le poids des pièces est négligé devant les autres actions mécaniques*** :

Cette hypothèse, très fréquemment utilisée, signifie que le poids le plus important est très faible devant la plus petite des autres actions mécaniques (un facteur d'ordre 10 au minimum).

Il faut être vigilant lorsque l'hypothèse est formulée de la façon suivante :
*Le poids des pièces est négligé devant les autres actions mécaniques **SAUF** pour la pièce…*

Unités

Le choix préalable d'unités de longueur (ex :*mm*) et d'unités d'efforts (ex : *N*) conditionne les unités des moments obtenus (ex : *N.mm*).

Les écritures fréquemment rencontrées sont : *N.m*
daN.m(déca Newton.mètre = 10*N.m)*
mN.m (milli Newton.mètre = 10−3 *N.m, électronique)*

Quelque soit l'unité utilisée, il faut impérativement la préciser lors d'application numérique.

La présence éventuelle d'actions de pression sur un ensemble isolé nécessite de connaître les unités de pression usuelles utilisées dans les sujets :
-Un Pascal (*Pa*) est égal à un Newton (*N*) par mètre carré (m^2).
-Un Méga Pascal (*MPa*) est égal à 10^6 *Pa*.
-Un bar (*bar*) est égal à 10^5 *Pa*.

Cas tenant compte du phénomène de frottement

- **On se place à la limite du glissement** :

Cette hypothèse, permet de placer la résultante de l'action mécanique de contact sur le cône

d'adhérence. Cela permet d'utiliser l'équation qui lie le coefficient de frottement (≈ coef. d'adhérence), la composante normale et la composante tangentielle de l'action mécanique de contact.
De plus, le sens de la composante tangentielle est opposé au sens du mouvement qui existerait **S'** il y avait glissement.